GAUSS PRINCIPLE FOR SYSTEMS WITH IMPERFECT CONSTRAINTS IN THE CASE OF POSSIBLE DISPLACEMENTS THAT SATISFY THE EXTENDED METHOD OF COMBINING CONSTRAINTS

Manglieva Zhuragul Khamrokulovna
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Navoi State Mining Institute, Department of Mechanical Engineering Technology, Navoi, Republic of Uzbekistan;
Mustafoev Bobur Bakhshillaevich
Student 15b-19MT, Navoi State Mining Institute, Navoi, Republic of Uzbekistan
Ibragimov Alisher Davlatovich
Student, Department of General Chemistry, Mari State University, Yoshkar-Ola, Republic of Mari

Abstract: Let us consider the question of the applicability of the Gauss principle for systems with imperfect constraints (constraints with friction) in the case of possible displacements. A mechanical system of material points () with masses, the position of which relative to the inertial Cartesian coordinate system is determined by the radius vectors (). The system is under the action of given forces and is constrained by joint and independent connections, among which there are both geometric

ПРИНЦИП ГАУССА ДЛЯ СИСТЕМ С НЕИДЕАЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ В СЛУЧАЕ ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ РАСШИРЕННОМУ МЕТОДУ КОМБИНИРОВАНИЯ СВЯЗЕЙ

1. Манглиева Журагул Хамрокуловна *– кандидат физико-математических наук, доцент, Навоийский государственный горный институт кафедра технологии машиностроения, г. Навои, Республика Узбекистан;*
2. Мустафоев Бобур Бахшиллаевич *– студент15б-19МТ, Навоийский государственный горный институт, г. Навои, Республика Узбекистан*
3. Ибрагимов Алишер Давлатович *– студент, кафедра общей химии, Марийский государственный университет, г. Йошкар-Ола, Республика Марий*

Рассмотрим вопрос применимости принципа Гаусса для систем с неидеальными связями (связи с трением) в случае образования возможных перемещений. Механическую систему из N материальных точек M_K ($k=1,2,...,N$) с массами m_k , положение которых относительно инерциальной декартовой системы координат определяется радиус–векторами $\vec{r}_k(x_\gamma)$ ($\gamma=1,2,...,3N$). Система находится под действием заданных сил $\vec{F}_k(X_\gamma)$ и стеснена совместными и независимыми связями, среди которых имеются как геометрические

$$f_\alpha(x_1,x_2,...,x_{3N},t)=0 \qquad (\alpha=1,...,a), \tag{1.1}$$

так и кинематические, вообще говоря, нелинейные

$$\varphi_\beta(x_\gamma,\dot{x}_\gamma,t)=0 \qquad (\beta=1,...,b). \tag{1.2}$$

.Для этого дифференцируя по времени уравнения (1.1) два раза, а уравнения (1.2) один раз, получим:

$$\sum_{\gamma=1}^{3n}\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\gamma}\ddot{x}_\gamma + A_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1,\ldots,a), \tag{1.3}$$

$$\sum_{\gamma=1}^{3n}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{x}_\gamma}\ddot{x}_\gamma + B_\beta = 0 \qquad (\beta = 1,\ldots,b), \tag{1.4}$$

где A_α и B_β, члены, не содержащие ускорений, а $\ddot{x}_\gamma$ - действительные ускорения точек системы.

Обозначим через $\ddot{x}'_\gamma$ кинематически возможные ускорения, то есть ускорения, совместимые со связями (1.1) и (1.2). Последние будут удовлетворять условиям:

$$\sum_{\gamma=1}^{3n}\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\gamma}\ddot{x}'_\gamma + A_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1,\ldots,a), \tag{1.5}$$

$$\sum_{\gamma=1}^{3n}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{x}_\gamma}\ddot{x}'_\gamma + B_\beta = 0 \qquad (\beta = 1,\ldots,b). \tag{1.6}$$

Поскольку A_α и B_β являются функциями времени, координат и скоростей, то из $\sum_{k=1}^{N}(\vec{F}_k + \vec{R}_k^\tau - m_k\vec{w}_k)\delta\vec{r}_k = 0$; (1.5), (1.6) получим

$$\delta\ddot{x}_\gamma = \ddot{x}_\gamma - \ddot{x}'_\gamma,$$

$$\sum_{\gamma=1}^{3n}\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\gamma}\delta\ddot{x}_\gamma = 0,$$

$$\sum_{\gamma=1}^{3n}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{x}_\gamma}\delta\ddot{x}_\gamma = 0. \tag{1.7}$$

Сравнивая эти выражения с условиями на возможные перемещения

$$\sum_{\gamma=1}^{3N}\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\gamma}\delta x_\gamma = 0, \quad \sum_{\gamma=1}^{3N}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{x}_\gamma}\delta\dot{x}_\gamma = 0.$$

видим, что вариации ускорений удовлетворяют тем же условиям, что и возможные перемещения. Поэтому из $\sum_{k=1}^{N}(\vec{F}_k + \vec{R}_k^\tau - m_k\vec{w}_k)\delta\vec{r}_k = 0$ получим:

$$\sum_{\gamma=1}^{3n}\left(m_\gamma\ddot{x}_\gamma - X_\gamma - R_\gamma^\tau\right)\left(\ddot{x}_\gamma - \ddot{x}'_\gamma\right) = 0. \tag{1.8}$$

Движение системы, которое она будет совершать под действием заданных сил $\overline{F}_k$ и сил, равных силам трения $\vec{R}_k^\tau$, будем называть действительным освобожденным движением. Ускорения точек в действительном освобожденном движении обозначим через a_γ ($\gamma = 1,2,\ldots,3N$).

Поскольку общее уравнение динамики справедливо и для освобожденной системы, то имеет место выражение:

$$\sum_{\gamma=1}^{3n}\left(m_\gamma a_\gamma - X_\gamma - R_\gamma^\tau\right)\left(\ddot{x}_\gamma - \ddot{x}'_\gamma\right) = 0. \qquad (1.9)$$

Вычитая теперь (1.8) из (1.9), получим

$$\sum_{\gamma=1}^{3n} m_\gamma\left[\left(\ddot{x}_\gamma - a_\gamma\right)\left(\ddot{x}_\gamma - \ddot{x}'_\gamma\right)\right] = 0. \qquad (1.10)$$

Последнее соотношение можно преобразовать к виду:

$$\sum m_\gamma\left[\left(\ddot{x}_\gamma - a_\gamma\right)\left(\ddot{x}_\gamma - \ddot{x}'_\gamma\right)\right] = \sum \frac{m_\gamma}{2}\begin{bmatrix}\left(\ddot{x}_\gamma^2 - 2\ddot{x}_\gamma\ddot{x}'_\gamma + x_\gamma'^2\right) - \left(\ddot{x}_\gamma'^2 - 2\ddot{x}'_\gamma a_\gamma + a_\gamma^2\right) + \\ + \left(a_\gamma^2 - 2\ddot{x}_\gamma a_\gamma + \ddot{x}_\gamma^2\right)\end{bmatrix}. \qquad (1.11)$$

Если ввести теперь меры отклонения [1] (определение по Гауссу)

$$A_{dD} = \sum \frac{m_\gamma}{2}(\ddot{x}_\gamma - a_\gamma)^2,$$

$$A_{\mu g} = \sum \frac{m_\gamma}{2}(a_\gamma - \ddot{x}'_\gamma)^2,$$

$$A_{d\mu} = \sum \frac{m_\gamma}{2}(\ddot{x}_\gamma - \ddot{x}'_\gamma)^2,$$

то из (1.11) получим

$$A_{d\mu} + A_{dD} - A_{\mu g} = 0. \qquad (1.12)$$

Так как каждое слагаемое последнего соотношения неотрицательно, то должны выполняться условия

$$A_{d\mu} \le A_{\mu g}, \quad A_{dD} \le A_{\mu g}. \qquad (1.13)$$

Второе из этих неравенств представляет собой обобщение принципа наименьшего принуждения Гаусса для систем с неидеальными связями. Согласно этому принципу, среди возможных ускорений действительные ускорения точек системы с неидеальными связями обращают в минимум функцию

$$A_{d\mu} = \frac{1}{2}\sum_{\gamma=1}^{3n} m_\gamma\left(\ddot{x}_\gamma - \frac{X_\gamma + R_\gamma^\tau}{m_\gamma}\right)^2. \qquad (1.14)$$

Таким образом, согласно полученному принципу Гаусса, среди всех мыслимых ускорений, действительные ускорения точек систем с трением обращают в минимум функцию (1.14) и наоборот, условия минимума функции (1.14) по ускорениям, удовлетворяющие условиям (1.3) и (1.4), приводят к дифференциальным уравнениям действительного движения системы с неидеальными связями

$$\ddot{x}_\gamma = \frac{1}{m_\gamma}\left(F_\gamma + \sum_{\alpha=1}^{a}\lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\gamma} + \sum_{\beta=1}^{b} u_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{x}_\gamma} + \sum_{j=1}^{r} \mu_j \frac{\partial (m_\gamma \dot{x}_\gamma)}{\partial p_j}\right). \qquad (1.15)$$

Таким образом, в данной главе расширенный метод комбинирования связей распространен на неголономные системы с неидеальными связями. Показано, что для таких систем имеет место общее уравнение динамики, которое позволяет обобщить принцип наименьшего принуждения Гаусса.

Следует отметить, в данной статье дан единый подход к исследованию широкого круга задач механики голономных и неголономных систем с неидеальными связями на основе расширенного метода комбинирования связей. Получены следующие основные результаты:

1. На конкретных примерах (обобщенные задачи Пенлеве и Аппеля) показаны методика составления дифференциальных уравнений движения для систем с геометрическими неидеальными и с условными связями и методика определения сил связей и закона трения системы.
2. Дано распространение расширенного метода комбинирования связей на неголономные системы с неидеальными связями. Показано, что для таких систем имеет место общее уравнение динамики.
3. Дано обобщение принципа наименьшего принуждения Гаусса для неголономных систем с неидеальными связями в случае , когда возможные перемещения удовлетворяют условиям расширенного метода комбинирования связей.
4. Исследованы движения управляемых фрикционных регуляторов скорости, на которые, кроме пассивных кинематических связей, наложена неидеальная условная связь в виде постоянства угловой скорости приёмного вала.

1. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Гостехиздат, 1961. –824с.
2. Козлов В.В. О вариационных принципах механики // ПММ. –М.: Наука, 2010. Т. 74. – вып.5. – С. 707-717.